Universidad Autónoma de Zacatecas

Unidad Académica Preparatoria

Cuadernillo de ejercicios de probabilidad

Versión: 033

Prof. Tarsicio Bermeo
http://uap.uaz.edu.mx/docentes/t_bermeo/
elciudadanocero@hotmail.com

Contenido

Introducción

Este cuadernillo de ejercicios de probabilidad está dirigido a los alumnos y las alumnas que cursan la asignatura Estadística y Probabilidad en la orientación en ciencias físico-matemáticas, durante el sexto semestre de bachillerato, en la Unidad Académica Preparatoria de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

El contenido es básico e introductorio, su objetivo es presentar a los alumnos a la probabilidad como la ciencia, rama de las matemáticas, que se encarga del estudio de los experimentos aleatorios, y como la base de la inferencia estadística.

La propuesta de trabajo con el uso del cuadernillo radica en que que los ejercicios los realicen los alumnos durante la clase, una vez que el profesor haya explicado los conceptos y demostrado los procedimientos involucrados en cada problema planteado.

Este cuadernillo cuenta con cien versiones, con ejercicios iguales, pero con resultados de fenómenos aleatorios diferentes (o mejor dicho similares), con la inteción de desmotivar la simple copia de los resultados, y al mismo tiempo, promover el trabajo en equipo y colaborarivo.

Adicionalmente, después de cada ejercicio, y como apoyo a la explicación del profesor, se describe, de manera resumida y simplificada, el procedimiento para resolverlo; y en seguida, se ofrece un enlace a un video de YouTube, donde se resuelve un ejercio similar.

Además de un instrumento de aprendizaje, el cuadernillo es también un instrumento de evaluación, completarlo es uno de los requisitos para aprobar la asignatura.

Finalmente, este cuadernillo y sus cien versiones, fue realizado únicamente con software libre: los fenómenos aleatorios fueron simulados con el programa para estadística R, el diseño fue hecho en Inkscape y la maquetación en Scribus; también se usaron las herramientas Writer para la edición de textos y Math para la edición de fórmulas, ambas de Libre Office; todo funcionando en el sistema operativo Ubuntu 14.04 LTS (Trusty Tahr).

1.
Técnicas de conteo

1.1 Principio de inclusión y exclusión

1.1.1 Treinta y dos jóvenes ecologistas recolectan papel o botellas (o ambas) para reciclar; de ellos, 30 recolectan papel y 14 recolectan botellas. Encuentre el número de jóvenes que:

a) Recolectan papel y recolectan botellas:

b) Recolectan solo papel:

c) Recolectan solo botellas:

Dados dos conjuntos, A y B, finitos y no mutuamente excluyentes, el número de elementos, o cardinalidad, que hay en A o en B, teniendo en consideración aquellos que pudieran estar en ambos conjuntos a la vez, puede calcularse como:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Que se conoce como principio de inclusión y exclusión. Queda claro que:

$$\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$$

Es la cardinalidad del conjunto que contiene todos los elementos que están en A pero no están en B, es decir, la diferencia entre A y B.

https://www.youtube.com/watch?v=IKWrxnLmrrg

1.2 Diagrama de árbol

1.2.1 Mario y Eduardo juegan al tenis con la siguiete regla: ganará aquel que gane dos partidos seguidos o un total de tres. Elabore un diagrama de árbol con todos los posibles resultados del encuentro y, con base en este realice lo siguiente:

a) En un conjunto denominado U liste todos los posibles resultados del encuentro:

b) En un conjunto denominado A liste todos los resultados en el que el ganador es Mario:

c) Diga cuántos posibles resultados tienen U y A:

Un diagrama de árbol es una representación gráfica usada para enumerar todos los posibles resultados de una secuencia de procedimientos que pueden realizarse de un número finito de maneras.

www.youtube.com/watch?v=G0bYktrgQ30

1.3 Principio de la multiplicación

1.3.1 Una caja contiene 8 calcetines azules y 6 calcetines rojos, encuentre el total de formas en el que dos calcetines pueden ser seleccionados de la caja si:

a) Los calcetines pueden ser de cualquier color:

b) Los calcetines tienen que ser del mismo color:

Si un procedimiento A puede realizarse de $\#A$ formas distintas, y uno B de $\#B$, el total de maneras en las que pueden realizarse ambos procedimientos es el producto de las cardinalidades.

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

Que se conoce como principio de la multiplicación o principio básico del conteo. Cabe recordar el principio de la suma:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

Según el cual, la cardinalidad de la unión de dos conjuntos A y B, es igual a la suma de las cardinalidades de dichos conjuntos.

1.4 Combinatoria

1.4.1 La contraseña de una computadora se compone de seis caracteres, que pueden incluir las letras mayúsculas del alfabeto (A ... Z) y los dígitos (0 ...9).

a) ¿Cuántas contraseñas puede haber para acceder a la computadora?

b) Si la contraseña debe contener al menos un dígito ¿cuántas contraseñas diferentes puede haber?

Se llaman variaciones con repetición al conjunto de todos los grupos de un número *k* de elementos elegidos de *n* elementos, tal que el orden con el que se eligen los *k* elementos es importante, y estos se pueden repetir en cada grupo.

$$VR_n^k = n^k$$

www.youtube.com/watch?v=t7oHJD7h6gM

1.4.2 Seis amigas: Candy, Cathy, Sandy, Cindy, Mindy y Amy quieren tomarse una foto.

a) ¿De cuántas maneras pueden acomodarse para la foto?

b) Si Candy tiene que estar junto a Amy ¿de cuántas maneras pueden acomodarse para la foto?

c) Si Candy tiene que estar cerca de Amy pero lejos de Mindy ¿de cuántas maneras pueden acomodarse entonces?

Se llaman <u>permutaciones</u> a todos los grupos de *n* elementos que pueden formarse eligiendo de un conjunto de *n* elementos, tal que el orden es importante y los elementos no se pueden repetir.

$$P_n = n!$$

www.youtube.com/watch?v=O47L0kavV8E

1.4.3 Se cuenta con 14 alumnos, 8 mujeres y 6 hombres, que desean colaborar en una brigada de limpieza escolar que deberá formarse por cinco alumnos.

a) ¿Cuántas brigadas podrán formarse?

b) ¿Cuántas brigadas tendrán a tres mujeres?

c) ¿Cuántas brigadas tendrán a por lo menos cuatro hombres?

Son combinaciones todos los grupos de k elementos elegidos de un conjunto de n elementos, tal que al hacer la selección el orden no importa y los elementos no se pueden repetir.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

www.youtube.com/watch?v=CEz2pEMq5uM

1.4.4 En el Jardín del Edén hay los siguientes árboles frutales: el árbol de la ciencia del bien y del mal, el de la vida, el de abiu, el de babaco, el de chirimoya, el de durian, el de émblica, y el de feijoa. Un día Adán estaba hambriento y pidió a Eva traerle una canasta con cinco frutas.

a) ¿De cuántas formas puede Eva llevar la canasta de frutas a Adán?

b) ¿En cuántas canastas no hay frutas del árbol de la ciencia del bien y del mal?

c) ¿En cuántas canastas no hay frutos del árbol de la ciencia del bien y del mal pero hay al menos una fruta del árbol de la vida?

A los grupos de k elementos que pueden formarse de n tipos de elementos, sin que importe el orden y pudiéndose repetir los elementos se les conoce como combinaciones con repetición.

$$CR_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

www.youtube.com/watch?v=WqHZx64RW-Q

2.
Enfoques de la probabilidad

2.1 Enfoque clásico

2.1.1 En una clase hay 7 varones y cinco mujeres; el grupo selecciona dos al azar como representantes, ¿cuál es la probabilidad de que sean elegidos un hombre y una mujer?

2.1.2 Un dado es lanzado seis veces, ¿cuál es la probabilidad de que los números obtenidos en los lanzamientos sean diferentes?

www.youtube.com/watch?v=yqq91dq8MD4

2.1.3 Un amigo y usted esperan verse para almorzar, ambos llegan a su restaurante favorito a una hora cualquiera entre las 12:00 y las 13:00 horas, almuerzan en 15 minutos y regresan cada uno a su casa, ¿cuál es la probabilidad de que su amigo y usted se encuentren en el restaurante?

Dado un evento A de un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es Ω, la probabilidad de A, de acuerdo con el enfoque clásico se calcula como:

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}$$

Esto es, el número de resultados favorables al evento A entre el total de resultados posibles; y que se conoce como fórmula de Laplace.

2.2 Enfoque frecuentista

2.2.1 Un jugador ha anotado, como se muestra en la siguiente tabla, los días que gana o pierde en un determinado juego de casino, según si lleva o no consigo su pata de conejo de la buena suerte.

	Gana	Pierde
Lleva la pata	12	238
No lleva la pata	6	119

Elegido un día al azar, determine:

a) La probabilidad de que lleve al casino su pata de conejo de la suerte:

b) La probabilidad de ganar en el juego:

c) La probabilidad de perder en el juego:

d) La probabilidad de ganar y de llevar la pata de conejo:

e) La probabilidad de ganar o llevar la pata de conejo:

f) La probabilidad de ganar dado que lleva al casino la pata de conejo:

g) Diga si los eventos ganar y llevar la pata de conejo son independientes y explique por qué:

2.2.2 La tabla siguiente muestra el coeficiente intelectual (IQ) clasificado según el nivel de creatividad de un grupo de individuos que participaron en un estudio psicológico.

	Alta creatividad	Baja creatividad
Alto IQ	59	10
Bajo IQ	75	56

Elegido un individuo al azar, calcule:

a) La probabilidad de que tenga un nivel alto de creatividad:

b) La probabilidad de que tenga un nivel alto de IQ:

c) La probabilidad de que tenga un nivel bajo de IQ:

d) La probabilidad de tener un nivel alto de IQ y un nivel alto de creatividad:

e) La probabilidad de tener un nivel alto de IQ o un nivel alto de creatividad:

f) La probabilidad de tener un nivel alto de creatividad dado que se tiene un nivel alto de IQ:

g) Diga si los eventos nivel alto de IQ y nivel alto de creatividad son independientes y explique por qué:

De acuerdo con la noción frecuentista, la probabilidad de ocurrencia de un evento A será aproximadamente igual al número de veces que se observa dicho evento en n repeticiones del experimento aleatorio.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

De acuerdo con uno de los axiomas de la probabilidad planteados por Kolmogorov, la probabilidad del espacio muestral o evento seguro es igual con uno:

$$P(\Omega) = 1$$

Entonces, la probabilidad del complemento del evento A, o de que A no suceda, puede calcularse como:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Fórmula que se conoce como regla del complemento, y que es una de las propiedades de la probabilidad.

Según la regla de la suma, la probabilidad de que ocurra A u ocurra B cuando A y B no son mutuamente excluyentes es igual con:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En dicha regla se encuentra implícito el principio de inclusión y exclusión.

Cabe recordar el axioma que dice, que si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o de que ocurra B será igual a la suma de las probabilidades de ambos eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Donde se encuentra implícito el principio de la suma.

La probabilidad condicional del evento A cuando ya ocurrió B, puede calcularse como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donde es claro que la probabilidad de ocurrencia de B debe ser mayor que cero.

Se dice que dos evento A y B son independientes cuando se cumple la siguiente igualdad:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Es decir, cuando la ocurrencia de B no modifica la probabilidad de ocurrencia del evento A.

www.youtube.com/watch?v=2y6zs8o-YWg

3.
Teorema de Bayes

3.1 Probabilidad total y teorema de Bayes

3.1.1 Se sabe que el 8% de los ciclistas profesionales usan esteroides. Se aplica un examen que da positivo el 99% de los casos en el que los ciclistas usan esteroides, y en 7% en los casos en que los ciclistas no usan esteroides. Calcule:

a) La probabilidad de que la prueba sea negativa dado que el ciclista usa esteroides:

b) La probabilidad de que el ciclista use esteroides y la prueba de positivo:

c) La probabilidad de que la prueba de positivo:

d) Si un ciclista da negativo en la prueba, la probabilidad de que use esteroides:

e) Si un ciclista da positivo en la prueba, la probabilidad de que no use esteroides.

De la fórmula de la probabilidad condicional puede deducirse la probabilidad conjunta de dos eventos A y B como:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Que se conoce como regla del producto. Es claro que si dos eventos A y B son independientes se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Que es llamada regla del producto para eventos independientes.

El evento A y el complemento de A son una partición del espacio muestral, entonces, para cualquier evento B, el teorema de la probabilidad total dice:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

Y el teorema de Bayes establece que:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Donde el denominador no es otra cosa que la fórmula de la probabilidad total.

www.youtube.com/watch?v=cK-aPU-vRM8

4.
Variable aleatoria

4.1 Variable aleatoria discreta

4.1.1 De acuerdo con los datos del último censo de población y vivienda, la función de probabilidad del número de hijos en cada hogar de determinado nivel de ingresos, es como se muestra en la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.13	0.27	0.46	0.10	0.04

Calcule:

a) La probabilidad de que un hogar seleccionado al azar tenga dos hijos o menos:

b) La probabilidad de que un hogar tenga más de dos hijos:

c) El valor esperado de la variable aleatoria:

d) La varianza y la desviación estándar:

Dada una función de probabilidad de variable aleatoria discreta, su función de distribución, esto es, la probabilidad de que la variable tome un valor determinado o menor, se calcula como:

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x\le u} P(X\le u)$$

Para obtener el valor esperado se multiplica cada evento por su probabilidad y se suman dichos productos.

$$E(X)=\sum xf(x)$$

La varianza se calcula como:

$$V(X)=\sum (x-E(X))^2 f(x)$$

Y la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

$$D(X)=\sqrt{V(X)}$$

www.youtube.com/watch?v=jwB2SmYkD7o

4.2 Variable aleatoria continua

4.2.1 Considere una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x)=2x \quad x\in(0,1)$$

Calcule:

a) La probabilidad de que la variable esté entre 1/4 y 1/2:

b) La esperanza:

c) La varianza:

Si X es una variable aleatoria continua para todo $a<b$ se cumple:

$$F(b)-F(a)=P(a<X\leq b)=\int_a^b f(x)dx$$

La esperanza o media de una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f es:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Y la varianza:

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty} (x-E(X))^2 f(x)dx$$

www.youtube.com/watch?v=2oFF6CPsbZ8

5.
Distribuciones de probabilidad

5.1 La distribución binomial

5.1.1 La quimioterapia ofrece una tasa de supervivencia en cinco años de 73% para cierto tipo de cáncer. Para un grupo de 9 pacientes con cáncer que fueron tratados con quimioterapia calcule:

a) La probabilidad de que cinco pacientes sobrevivan los siguientes cinco años:

b) La probabilidad de que al menos cinco pacientes sobrevivan los siguientes cinco años:

c) La probabilidad de que más de cinco pacientes sobrevivan los siguientes cinco años:

d) El valor esperado de pacientes que se espera sobrevivirá los siguientes cinco años:

e) La varianza y la desviación estándar:

Se dice que una variable aleatoria sigue una distribución binomial si consta de n repeticiones independientes de un ensayo cuya probabilidad de éxito es p.

$$X \sim Bin(n, p)$$

Su función de probabilidad está dada por:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

Donde *q=1-p* es la probabilidad de fracaso. El valor esperado, la varianza y la desviación estándar pueden calcularse como:

$$E(X)=np$$

$$V(X)=npq$$

$$D(X)=\sqrt{npq}$$

www.youtube.com/watch?v=VbIyBmaoC-s&t=36s

5.2 La distribución normal

5.2.1 La velocidad con la que los automóviles de una ciudad pasan por un punto de verificación está normalmente distribuida con media de 60.2 y desviación estándar de 4.2 millas por hora.

Calcule:

a) La probabilidad de que el siguiente automóvil pase por el punto de verificación a una velocidad menor de 66.92 millas por hora.

b) La probabilidad de que el siguiente automóvil pase por el punto de verificación a una velocidad mayor de 66.92 millas por hora.

c) La probabilidad de que el siguiente automóvil pase por el punto de verificación a una velocidad mayor de 54.32 millas por hora.

d) La probabilidad de que el siguiente automóvil pase por el punto de verificación a una velocidad menor de 54.32 millas por hora.

e) La probabilidad de que pase por el punto de verificación a una velocidad de entre 64.40 y 68.60 millas por hora.

f) La probabilidad de que pase por el punto de verificación a una velocidad de entre 47.60 y 51.80 millas por hora.

g) La probabilidad de que pase por el punto de verificación a una velocidad de entre 51.38 y 69.02 millas por hora.

h) La probabilidad de que pase por el punto de verificación a una velocidad de menor de 51.38 o mayor a 69.02 millas por hora.

La distribución continua más importante y utilizada es la normal, cuya función de densidad de probabilidad está dada por la fórmula siguiente:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La distribución normal estándar es una distribución normal con media 0 y desviación estándar 1. La letra *Z* es usada para representar una variable aleatoria normal estándar. En el apéndice 1 se encuentra la tabla de la distribución normal estándar, que contiene las áreas bajo la curva acumuladas hasta determinados valores positivos de *Z*.

Para calcular la probabilidad de ocurrencia de algún fenómeno aleatorio que sigue una distribución normal conviene, en primer lugar, identificar el área bajo la curva normal a la que corresponde tal probabilidad.

En segundo término, estandarizar la variable aleatoria:

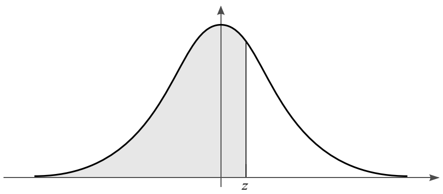
$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

En tercer lugar, buscar el valor de *Z* en la tabla de la distribución normal estándar y, finalmente, hacer las sumas o restas convenientes, de acuerdo con la guía que se encuentra en el apéndice 2.

www.youtube.com/watch?v=P6Q4brGpTXI

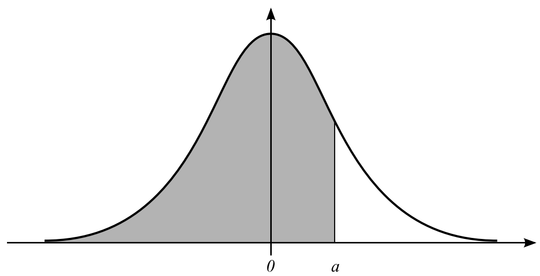
—oOo—

Apéndice 1.
Tabla de la distribución normal estándar

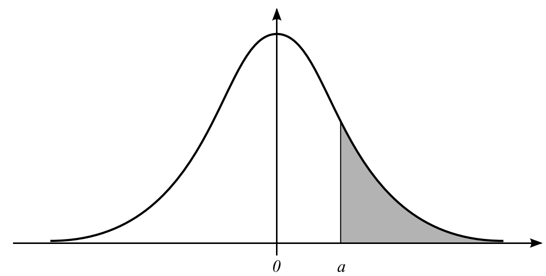


Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8399
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

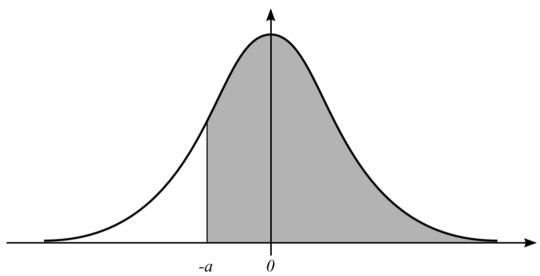
Apéndice 2.
Guía de uso de la normal estándar



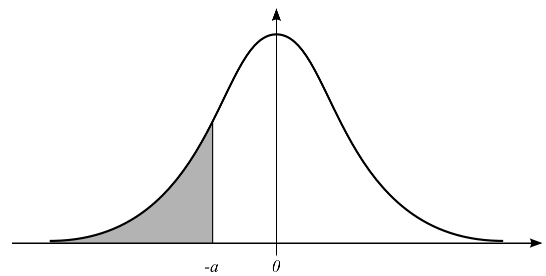
$P(Z \leqslant a)$



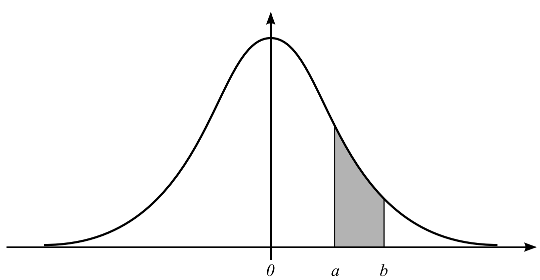
$P(Z \geqslant a) = 1 - P(Z \leqslant a)$



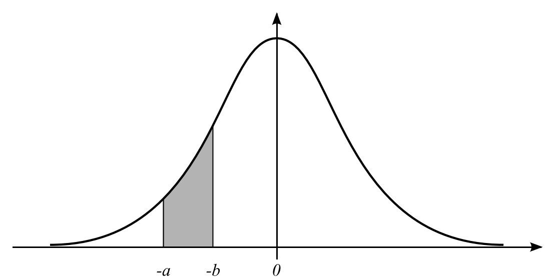
$P(Z \geqslant -a) = P(Z \leqslant a)$



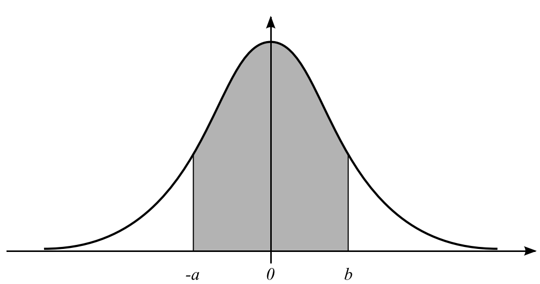
$P(Z \leqslant -a) = 1 - P(Z \leqslant a)$



$P(a \leqslant Z \leqslant b) = P(Z \leqslant b) - P(Z \leqslant a)$



$P(-a \leqslant Z \leqslant -b) = P(Z \leqslant a) - P(Z \leqslant b)$



$P(-a \leqslant Z \leqslant b) = P(Z \leqslant b) - 1 + P(Z \leqslant a)$